AP MII 2018 HT - B1 - Lösungsmuster

B 1.0 Die Parabel p verläuft durch die Punkte $P(-2|19)$ und $Q(4|-5)$. Sie hat eine Gleichung der Form $y = 0{,}5x^2 + bx + c$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $b, c \in \mathbb{R}$.
Die Gerade g besitzt die Gleichung $y = 0{,}5x - 2$ mit $\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Runden Sie im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma.

B 1.1 Zeigen Sie durch Berechnung der Werte für b und c, dass die Parabel p die Gleichung $y = 0{,}5x^2 - 5x + 7$ besitzt.

- Die Koordinaten der Punkte $P(-2|19)$ und $Q(4|-5)$ in die Gleichung $y = 0{,}5x^2 + bx + c$ einsetzen
- Das entstehende lineare Gleichungssystem (LGS) mit einem geeigneten Verfahren lösen

$P(-2|19)$ in p:

$$19 = 0{,}5 \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c$$
$$19 = 2 - 2b + c \quad | -2 + 2b$$
$$c = 17 + 2b \quad (I)$$

$Q(4|-5)$ in p:

$$-5 = 0{,}5 \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$$
$$-5 = 8 + 4b + c \quad | -8 - 4b$$
$$c = -13 - 4b \quad (II)$$

Gleichsetzungsverfahren (I) = (II):

$$17 + 2b = -13 - 4b \quad | -17 + 4b$$
$$6b = -30 \quad | : 6$$
$$\underline{\underline{b = -5}}$$

b in (I):

$$c = 17 + 2 \cdot (-5)$$
$$\underline{\underline{c = 7}}$$

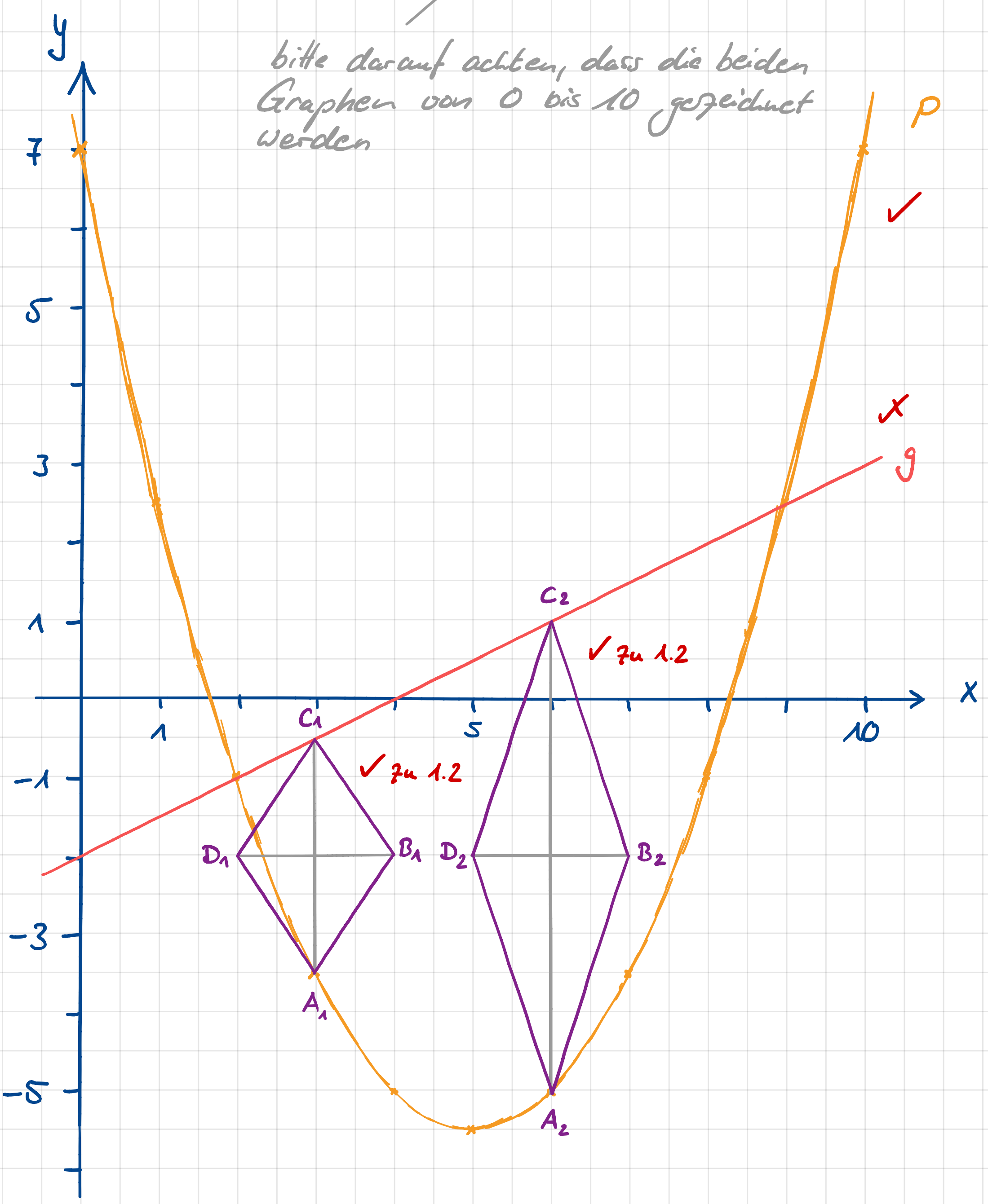
$\mathbb{L}(b|c) = \{(-5|7)\}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{p: y = 0{,}5x^2 - 5x + 7}}$

Zeichnen Sie die Parabel p und die Gerade g für $x \in [0;10]$ in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Längeneinheit 1 cm; $0 \leqq x \leqq 10$; $-6 \leqq y \leqq 8$

bitte darauf achten, dass die beiden Graphen von 0 bis 10 gezeichnet werden



B 1.2 Punkte $A_n\left(x \mid 0{,}5x^2 - 5x + 7\right)$ auf der Parabel p und Punkte $C_n\left(x \mid 0{,}5x - 2\right)$ auf der Gerade g besitzen dieselbe Abszisse x. Diese Punkte bilden zusammen mit Punkten B_n und D_n Rauten $A_nB_nC_nD_n$, wobei gilt: $\overline{B_nD_n} = 2$ LE und $y_{C_n} > y_{A_n}$.

Zeichnen Sie die Rauten $A_1B_1C_1D_1$ für $x = 3$ und $A_2B_2C_2D_2$ für $x = 6$ in das Koordinatensystem zu B 1.1 ein. 2 P

Einzeichnen der Rauten $A_1B_1C_1D_1$ ✓ für $x = 3$

und $A_2B_2C_2D_2$ ✓ für $x = 6$

B 1.3 Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Werte von x es Rauten $A_nB_nC_nD_n$ gibt.
Geben Sie das Intervall für x an. 3 P

Rauten existieren zwischen den Schnittpunkten der beiden Graphen

$$0{,}5x^2 - 5x + 7 = 0{,}5x - 2 \quad | -0{,}5x + 2$$

$$0{,}5x^2 - 5{,}5x + 9 = 0$$

$a = 0{,}5$

$b = -5{,}5$

$c = 9$

$$D = b^2 - 4ac = (-5{,}5)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 9 = 12{,}25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5{,}5) \pm \sqrt{12{,}25}}{2 \cdot 0{,}5}$$

$x_1 = 2$ ✓

$x_2 = 9$ ✓

Intervall: $x \in \,]2; 9[$ ✓

Wichtiger Hinweis:

Aufgrund der Aufgabenformulierung "Ermitteln Sie rechnerisch" ist hier eine alleinige Lösung mithilfe des (graphikfähigen) Taschenrechners nicht erlaubt.

B 1.4 Zeigen Sie, dass für die Länge der Strecken $[A_nC_n]$ in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n gilt: $\overline{A_nC_n}(x) = (-0{,}5x^2 + 5{,}5x - 9)$ LE.

Berechnen Sie sodann das Maß φ des Winkels $D_2C_2B_2$ und die Seitenlänge $\overline{A_2B_2}$ der Raute $A_2B_2C_2D_2$. 4 P

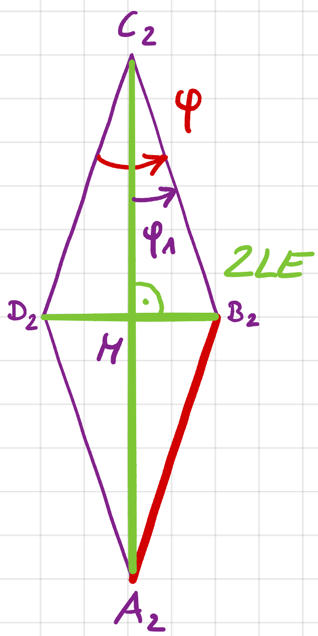
Die Punkte A_n und C_n haben dieselbe Abszisse x

⇒ sie liegen im KOSY senkrecht übereinander

⇒ $\boxed{s = y_{oben} - y_{unten}}$

Da der Term für y_{A_n} eine Summe/Differenz ist, ist die Klammer unbedingt erforderlich!

$$\overline{A_nC_n}(x) = y_{C_n} - y_{A_n}$$
$$= [0{,}5x - 2 - (0{,}5x^2 - 5x + 7)]\ LE$$
$$= [0{,}5x - 2 - 0{,}5x^2 + 5x - 7]\ LE$$
$$= [-0{,}5x^2 + 5{,}5x - 9]\ LE \checkmark$$



• $\overline{A_2C_2} = \overline{A_nC_n}(x=6) =$
$$= (-0{,}5 \cdot 6^2 + 5{,}5 \cdot 6 - 9)LE = 6\,LE \checkmark$$

Betrachte ΔMB_2C_2 (rechtwinklig):

• $\tan\varphi_1 = \dfrac{1LE}{3\,LE}$; $\varphi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 18{,}43°$ ✓

$$\varphi = 2 \cdot 18{,}43° = 36{,}86° \checkmark$$

• $\overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2} = \sqrt{1^2 + 3^2}\ LE = 3{,}16\ LE$ ✓

B 1.5 Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte B_n in Abhängigkeit von der Abszisse x der Punkte A_n. 2 P

- da Rauten 2-fach diagonalsymmetrisch sind und parallel zu den Achsen im KOSY liegen, befinden sich die Punkte B_n auf gleicher Höhe (y-Wert) wie die Mittelpunkte M_n der Strecken $[A_nC_n]$
- die Punkte B_n liegen in x-Richtung 1LE rechts von den Punkten A_n

vgl. Formel für Mittelpunkt einer Strecke

$$y_{B_n} = \frac{y_{C_n} + y_{A_n}}{2} = \frac{0{,}5x - 2 + (0{,}5x^2 - 5x + 7)}{2}$$

$$= \frac{0{,}5x^2 - 4{,}5x + 5}{2} = \underline{\underline{0{,}25x^2 - 2{,}25x + 2{,}5}}$$

$$x_{B_n} = x_{A_n} + 1 = \underline{\underline{x + 1}}$$

$$\Rightarrow \quad B_n(x+1 \mid 0{,}25x^2 - 2{,}25x + 2{,}5)$$

B 1.6 Begründen Sie rechnerisch, dass der Flächeninhalt A der Rauten $A_nB_nC_nD_n$ stets kleiner als 7 FE ist. 2 P

die maximale Fläche ergibt sich bei maximaler Länge $\overline{A_0C_0}$

$$\overline{A_nC_n}(x) = (-0{,}5x^2 + 5{,}5x - 9)\,LE$$

$a = -0{,}5$

$b = 5{,}5$

$c = -9$

$$\overline{A_0C_0} = c - \frac{b^2}{4a}$$

Formel für Scheitelpunkt (vgl. FS)

$$= \left(-9 - \frac{5{,}5^2}{4\cdot(-0{,}5)}\right)LE = 6{,}13\,LE$$

$$\Rightarrow \quad A_{max} = \frac{1}{2}\cdot \overline{A_0C_0}\cdot 2\,LE$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 6{,}13\cdot 2\ FE$$

$$= \underline{\underline{6{,}13\ FE}} < 7\ FE$$